

如何预测直接数字频率合成器(DDS)输出频谱中主相位截断杂散的频率和幅度

作者: Ken Gentile

简介

现代直接数字频率合成器(DDS)通常利用累加器和数字频率调谐字(FTW)在累加器输出端产生周期性的N位数字斜坡(见图1)。此数字斜坡可依据公式1定义DDS的输出频率(f_o),其中 f_s 为DDS采样速率(或系统时钟频率)。

$$f_o = f_s \times \frac{FTW}{2^N} \quad (1)$$

DDS给定时,组成FTW的位数(N)定义了 f_o 的最小可能变化,这发生在FTW值仅更改最低有效位(LSB)时。也就是说,FTW中的1 LSB变化定义了DDS的调谐分辨率。例如,N = 32的DDS的调谐分辨率高于N = 24的DDS。为了证实DDS的极佳调谐能力,以AD9912为例,N = 48产生的调谐分辨率为 $1/2^{48}$ (即 $1/281,474,976,710,656$)。事实上,

$f_s = 1$ GHz时,AD9912产生的频率调谐分辨率约为3.6 μ Hz (0.0000036 Hz)。

若DDS的FTW为N位,细看图1可知,累加器输出端的位数(N)和角度转幅度模块输入端的位数(P)之间存在明显的差异,即 $P \leq N$ 。这种差异会导致DDS输出频谱中出现相位截断杂散。

知道给定DDS的P值对预测相位截断杂散非常重要。本应用笔记介绍了一种用于计算特定相位截断杂散的频率和幅度的方法,尤其适合给定FTW的主相位截断(PPT)。

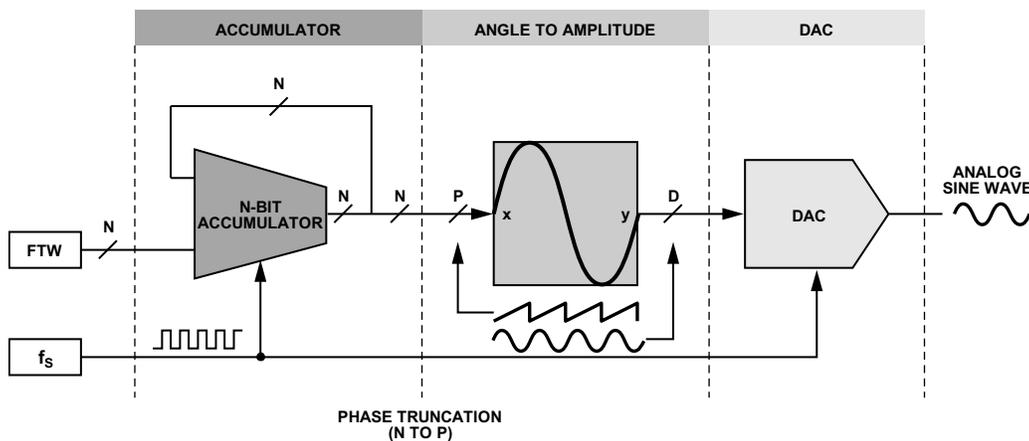


图1. DDS功能框图

14179-001

相位截断

累加器和FTW组成DDS的频率控制元件。但是，除了频率控制元件外，DDS还具有将N位累加器输出从相位值转换为幅度值的角度转幅度模块。角度转幅度模块占据了DDS数字电路的很大一部分。因此，通过增大N来提高DDS的调谐分辨率会大幅增加角度转幅度模块所需的电路数。同样，将所有N位相位信息转换为幅度不太实际。如图1所示，实际DDS使用累加器位的子集进行相位幅度转换，即P最高有效位(MSB)。这种位截断会大幅减少角度转幅度模块所需的电路数。但代价是需要在DDS输出端引入可能的频谱伪像(具体而言就是相位截断杂散)。

相位截断杂散

根据定义，按 $P = N$ 设计的DDS没有相位截断。因此，其输出频谱中没有相位截断杂散。但是在实际DDS中， $P < N$ ，这会产生相位截断。

有三类相位截断杂散：一阶、二阶和三阶。这几个分类源于DDS中相位幅度转换器和数模转换器(DAC)的级联组合的频谱特性。图2结合图形说明将傅里叶变换技术应用于角度转幅度模块(带P位相位输入)和呈现谐波失真的非理想DAC所产生的谱线。一般而言，频谱由 2^P 个频率构成，指数范围为0至 $2^P - 1$ ，分类详情如表1。

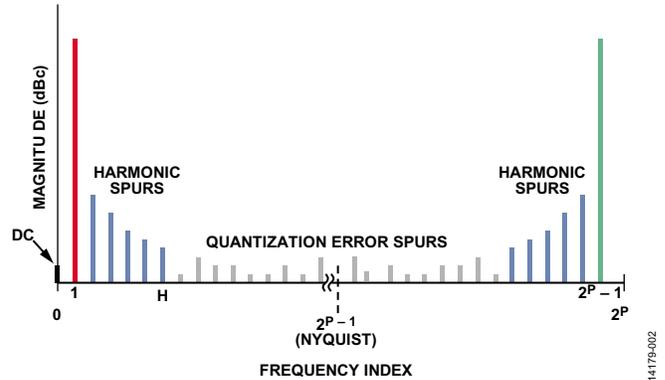


图2. 角度转幅度模块和DAC的频谱特性

主相位截断(PPT)杂散

每阶(一阶、二阶和三阶)的许多相位截断杂散可能在DDS的输出频谱中出现，具体取决于FTW的特定值。本应用笔记重点介绍最大的一阶杂散，即PPT杂散。

由于DDS输出是从相位采样生成波形的结果(即累加器输出)，因此DDS输出频谱遵循奈奎斯特采样理论的规则。输出频谱显示为两个完全相同的频谱，每个频谱跨越采样频率(f_s)一半的频率范围。这两个频谱是彼此的镜像，反映奈奎斯特频率($f_s/2$)。同样，PPT杂散将其自身表示为两个杂散。一个PPT杂散出现在0 Hz和 $f_s/2$ 之间，另一个作为其镜像出现在 $f_s/2$ 和 f_s 之间。

请注意，尽管两个PPT杂散是最大的一阶相位截断杂散，但整体而言，这些杂散可能不是最大的相位截断杂散。由于相位截断杂散在DDS输出频谱中的分配机制，部分二阶相位截断杂散的幅度可能大于PPT杂散。

我们无法预测二阶或三阶相位截断杂散的幅度。二阶相位截断杂散幅度取决于DAC的谐波失真特性，这些特性因器件而异。三阶相位截断杂散幅度与量化误差相关，而量化误差基本上是随机的。

表1. 图2中显示的频率分类

索引	颜色	频率分类
0	黑色	DC。
1	红色	基频或傅里叶频率。
$2^P - 1$	绿色	一阶相位截断杂散(基波的奈奎斯特频率镜像)。
$2 - H$ 、 $2^P - H$ 至 $2^P - 2$	蓝色	二阶相位截断杂散。第一组指数构成DAC谐波杂散，第二组指数构成其镜像。
$H + 1$ 至 $2^P - H - 1$	灰色	三阶相位截断杂散。这些杂散构成与角度幅度转换器和DAC相关的量化杂散(及其镜像)。

最右侧的非零位

计算PPT杂散的幅度和频率位置需要知道以下参数：

- DDS采样速率(f_s)
- 两个DDS参数：N和P
- FTW的特定值

对于给定应用，N和P固定， f_s 通常为恒定值。相反，FTW完全可变，控制 f_o 的值(详见公式1)。FTW的值不仅控制DDS输出频谱中 f_o 的位置，而且控制相位截断杂散的位置。事实上，对于DDS输出频谱，给定FTW的最重要特性是以二进制形式表示时的尾随零数量。尾随零数量定义了重要参数L，即FTW最右侧非零位的位置。

FTW中的L位位置取决于FTW的特定值(切记，FTW的值依据所需DDS输出频率而变化，详见公式1)。这种依赖性非常大，因为任意给定FTW的L位位置决定相位截断杂散在DDS输出频谱中的分配方式。

对于任意给定FTW，图3演示了如何找到L的值。首先，将FTW转换为二进制。然后，将指数值分配给FTW位，MSB的起始指数值为1。图3为一个32位FTW的示例；因此，指数范围为1至32。L值是值为1的最后一位的指数(从MSB向LSB读)。图3中的FTW值为0x0036e580(十六进制)，因此，采用本协议时，此特定FTW的L的值为25。

给定FTW的L的值最为重要。首先，L决定相位截断杂散是否出现在DDS输出频谱中。若 $L \leq P$ ，则没有相位截断杂散。若 $L > P$ ，则包括PPT杂散在内的相位截断杂散出现在DDS输出频谱中。其次，L和P的值可确定PPT杂散的幅度和频率(假定 $L > P$)。

PPT幅度

两个PPT杂散具有相同的幅度(见公式2)。若已知特定FTW的值和给定DDS设计的P值，两个PPT杂散的幅度为：

$$PPT \text{ 幅度} = 20 \times \log_{10} \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^L}\right)}{\sin\left(\frac{\pi(2^P - 1)}{2^L}\right)} \right| \quad (2)$$

其中，PPT幅度的值以dBc为单位：与频率为 f_o 时主DDS输出信号的幅度相关的分贝。

请注意，公式2中的两个正弦函数的参数以弧度为单位。例如，假设DDS的 $P = 19$ ，FTW如图3所示，则使用公式2得到的PPT杂散幅度为-114.38789 dBc。

PPT频率

需要多个步骤才能确定这两个PPT频率。第一步，得出K的值，FTW的十进制值截断为L位。要得到K，在FTW为二进制形式的情况下，消除尾随0并将得到的L位FTW转换为相应的十进制值。例如，图3中的FTW可得到 $K = 28,107$ (通过将二进制数字000000000110110111001011转换为相应的十进制数字得出)。

使用K计算两个PPT杂散的频谱指数位置(R1和R2)，如下面的公式3和公式4所示：

$$R1 = (K \times (2^P - 1)) \text{ modulo } 2^L \quad (3)$$

$$R2 = (K \times (2^L - 2^P + 1)) \text{ modulo } 2^L \quad (4)$$

例如，在DDS的 $P = 19$ 且FTW如图3所示的情况下，公式3中括号内的数字为14,736,134,709，公式4中括号内的数字为928,378,285,515。将 2^{25} 模数应用于这些值得到

$$R1 = 5,739,061$$

$$R2 = 27,815,371$$

根据下面的公式5和公式6，使用R1和R2确定DDS输出频谱中的两个PPT频率位置(f_{PPT1} 和 f_{PPT2})。

$$f_{PPT1} = f_s \times \frac{R1}{2^L} \quad (5)$$

$$f_{PPT2} = f_s \times \frac{R2}{2^L} \quad (6)$$

例如，若 $f_s = 250$ MHz，FTW如图3所示，且R1和R2的值已在前面的例子中计算出，则两个PPT杂散频率如下：

$$f_{PPT1} = 42.759336531162261962890625 \text{ MHz}$$

$$f_{PPT2} = 207.240663468837738037109375 \text{ MHz}$$

	MSB ----->																-----> L																LSB															
INDEX	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32																
FTW	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0																
HEX	0				0				3				6				e				5				8				0																			

图3. FTW的L位

结论

尽管本应用笔记介绍了一种相对简单的方式来预测两个PPT杂散的频率和幅度，但公式3和公式4可能引起计算问题。具体而言，括号内的数字由一个整数定义，可能非常大。

为了解释这些计算中较大整数引起的问题，试重新考虑AD9912，其中 $N = 48$ ， $P = 19$ 。假定FTW为 $0x400000000001$ （十六进制），即70,368,744,177,665（十进制）。在此例中， $L = 48$ ；因此，K的值与FTW相同。

现在考虑公式4中括号内的数字。 $2^L - 2^P + 1$ 可得到以下值：

$$2^{48} - 2^{19} + 1 = 281,474,976,186,369$$

因此，由公式4中括号内的数字可得到

$$\begin{aligned} K \times (2^L - 2^P + 1) &= 70,368,744,177,665 \times 281,474,976,186,369 \\ &= 19,807,040,591,672,948,094,687,248,385 \end{aligned}$$

以二进制形式表示此整数需要94位。大部分计算软件工具无法精确表示这种大小的整数。例如，在64位机器上运行的MATLAB将 $K \times (2^L - 2^P + 1)$ 表示为浮点数： $1.980704059167295 \times 10^{28}$ 。对应的整数为19,807,040,591,672,950,000,000,000,000。此值与真实值偏差较大，因此得到的R2并不正确。

事实上，不仅大部分软件工具无法处理极大整数，而且大部分计算机内部的处理器芯片也无法处理极大整数。例如，一台带64位处理器的计算机无法处理94位整数。这个问题至关重要，因为计算R1和R2值需要极大整数计算，这超出了大部分计算机的能力。

除了正确表示公式3和公式4中括号内的数字，还需要计算括号内数字的 $2L$ 模数。在前面的例子中， $L = 48$ ，这意味着模数达48位。大部分计算机不支持超过32位的模数计算。

总而言之，公式3和公式4产生的难题在使用软件工具实现PPT杂散计算时需要特别注意。用户必须将括号内的数字作为一个整数进行正确计算（无截断或四舍五入），并且应在不损失精度的情况下正确处理模数计算。

尽管大部分软件工具和处理器无法直接处理极大整数，但也有例外。例如，软件工具Python本身支持极大整数计算。尽管MATLAB®本身无法处理极大整数，但支持极大整数计算的可变精度整数(VPI)工具箱可在MATLAB Central的Math Works网站上免费下载。